



Evaluation of Small Area Models for Estimating COVID-19 Incidence with Bayesian and Classical Approaches: A Case Study of Kurdistan Province

Saleh Arekhi ¹, Mokhtar Jafari ^{1*}

¹ Geography Department, Human Sciences College, Golestan University, Gorgan, Iran

ARTICLE INFO

ABSTRACT

Article History:

Received: 14 May 2026

Revised: 28 October 2026

Accepted: 29 October 2026

Available Online:

29 October 2026

Keywords:

COVID-19

Small area estimation

Fay–Herriot model

BYM2

INLA

The COVID-19 pandemic highlighted the critical need for accurate small-area disease estimates, yet classical and Bayesian small area estimation (SAE) methods have rarely been compared in settings with very few spatial units ($n = 10$). This study evaluates four modelling frameworks—direct estimation, the Fay–Herriot (FH) model, the spatial Fay–Herriot (SFH) model, and the Bayesian BYM2 model approximated with INLA—for monthly COVID-19 incidence across 10 counties of Kurdistan Province, Iran, over 36 months. Twenty-seven auxiliary variables were reduced to four principal components and used as predictors. Model performance was assessed through RMSE, WAIC, and sampling variance sensitivity. The BYM2 model with an inverse-distance weight matrix systematically outperformed the other approaches, reducing median seasonal RMSE by an average of 38% relative to the FH model and achieving the lowest WAIC in nearly all months. The spatial FH model offered only marginal improvement over its non-spatial counterpart. Sensitivity analysis revealed that doubling the Poisson sampling variance altered EBLUP estimates by up to 10% in low-population counties. Bayesian spatial models, particularly BYM2, provide more stable estimates with lower uncertainty and are well-suited for sub-provincial health monitoring and resource allocation.

* Corresponding author: Saleh Arekhi

E-mail address: S.arekhi@gu.ac.ir

How to cite this article: Arekhi, S., & Jafari, M. (2026). Evaluation of Small Area Models for Estimating COVID-19 Incidence with Bayesian and Classical Approaches: A Case Study of Kurdistan Province. *Journal of Geography and Environmental Hazards*, ?(?), ?-?. <https://doi.org/10.22067/geoeH.2026.98726.1668>



©2026 The author(s). This is an open access article distributed under Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

Extended Abstract

Introduction

The COVID-19 pandemic exposed the vulnerability of public health surveillance systems in producing reliable estimates for small geographic areas, where direct survey- or register-based estimates become unreliable because of insufficient sample sizes (Rao & Molina, 2015; WHO, 2024). By mid-2024, over 770 million confirmed cases and 7 million deaths had been recorded globally, yet the true burden of disease at sub-national scales—especially in low- and middle-income countries with fragmented administrative data and pronounced spatial heterogeneity—remained largely unknown (Satorra-Burguet et al., 2024). This information gap has hindered the equitable allocation of health resources, the design of targeted non-pharmaceutical interventions, and the evaluation of vaccination campaigns at the community level (Maino-Vieytes et al., 2023). Consequently, there is an urgent methodological need to develop and validate statistical frameworks that can produce precise small-area estimates even under data-sparse conditions. Small area estimation (SAE) has emerged as a robust paradigm to address this challenge: a family of model-based techniques that borrow strength from spatial or temporal domains to deliver reliable estimates in regions with few spatial units (Rao & Molina, 2015). Among these, the area-level Fay–Herriot model (Fay & Herriot, 1979), which links direct estimates to area-level covariates through a linear mixed-effects framework, is one of the most widely used approaches. Its spatial extension, which incorporates spatially structured random effects, captures neighbourhood-driven dependencies in disease data (Guha & Chandra, 2024). At the same time, hierarchical Bayesian models, particularly those fitted with Integrated Nested Laplace Approximation (INLA; Rue et al., 2009), have gained popularity in epidemiological applications; the BYM and its reparameterised version BYM2 (Riebler et al., 2016) decompose spatial variation into structured and unstructured components and, through posterior distributions, provide a flexible framework for disease risk mapping. Recent studies have demonstrated the success of these models in estimating COVID-19 mortality at the county level and in detecting spatial transmission clusters (Rathnayake et al., 2023; Briz-Redón et al., 2022). Nevertheless, a notable knowledge gap remains regarding the comparison of classical frequentist SAE models (FH and SFH) with hierarchical Bayesian models (BYM2) for infectious disease monitoring when the number of spatial units is very small (fewer than 15). Most existing comparative studies have been conducted in settings with moderate to large numbers of areas or have relied exclusively on simulation, lacking validation with empirical pandemic data (Burgard et al., 2022). Moreover, the sensitivity of FH-type models to the specification of the sampling variance—a parameter that is difficult to estimate in Poisson-type settings with low counts—has received insufficient attention in applied literature (Marcis, Pagliarella, & Salvatore, 2023). Furthermore, while dimensionality reduction through principal component analysis (PCA) is common in practice, it has seldom been formally integrated into systematic model comparisons for spatial disease analysis (Jolliffe & Cadima, 2016). These methodological gaps are particularly pronounced at the county level, the scale at which many public health decisions are made.

This study addresses these gaps through a rigorous comparative evaluation. The primary objective is to compare four modelling frameworks for estimating monthly COVID-19 cases in 10 counties over a 36-month period (March 2020 – February 2023): direct estimation (observed means), the classical FH model with PCA-derived covariates, the spatial FH model with a queen-contiguity weight matrix, and the Bayesian BYM2 model estimated with INLA using several spatial weight matrices. Model performance is assessed through a multi-criteria framework that includes point-wise accuracy (RMSE, coefficient of variation), information-theoretic measures (WAIC, DIC), quantification of uncertainty (posterior standard deviation and 95% credible intervals for Bayesian models), and parametric bootstrap estimation of mean squared error (MSE) for FH predictors (Pfeffermann, Glickman, & Preminger, 2024). Additionally, a sensitivity analysis of sampling variance is conducted by multiplying the baseline Poisson variance by 0.5 and 2 to test the robustness of the results. The key research questions are: (1) Does incorporating spatial structure (via SFH or BYM2) lead to a meaningful improvement in predictive accuracy in a very small-area setting? (2) To what extent are FH-based estimates sensitive to the choice of sampling variance, and under what conditions do hierarchical Bayesian models provide greater inferential stability? The novelty of this

work lies in four main contributions: first, it is the first comprehensive comparison of FH, SFH, and BYM2 models in an area with as few as $N=10$ spatial units; second, covariates are constructed via PCA on 27 original variables to address multicollinearity while preserving maximal explanatory information; third, a systematic sampling variance sensitivity analysis is implemented; and fourth, relative risk and uncertainty maps are automatically generated for all months and seasons, ensuring full reproducibility.

Material and Methods

The study was conducted in Kurdistan Province, western Iran, which encompasses 10 counties over an area of 29,137 km² with a population of 1,603,011 in 2022. The province exhibits considerable topographic and climatic diversity, with elevations ranging from 900 m to 3,300 m and annual precipitation varying from 212 mm to 685 mm, creating a heterogeneous environment for disease transmission dynamics. Monthly laboratory-confirmed COVID-19 case counts for each county were obtained from the Kurdistan University of Medical Sciences for the period 21 February 2020 to 19 February 2023 (36 months). Twenty-seven auxiliary variables spanning socio-economic, demographic, healthcare, and climatic domains were compiled from the provincial statistical yearbook and the national meteorological organisation. To mitigate multicollinearity and reduce dimensionality, PCA was performed on the full panel of 360 observations (10 counties $\times$ 36 months) using the `prcomp()` function in R; the first four principal components, which together explained over 90% of the total variance, were retained as explanatory variables in all models. For seasonal analyses, monthly cases were aggregated into 13 climatic seasons (starting with a truncated winter 2020), with averaged PC scores.

Four modelling frameworks were compared:

1. Direct estimator: the observed monthly/seasonal case count for each county, serving as a baseline.

2. Fay–Herriot model: a standard area-level model $Y_i = X_i^T \beta + u_i + e_i$ with $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ and $e_i \sim N(0, \sigma_e^2)$ where v_i was set to the observed case count under a Poisson assumption. Parameters were estimated via REML, and EBLUPs were obtained using the `ebLupFH()` function from the `sae` R package.

3. Spatial Fay–Herriot model: the random effects u were modelled with a simultaneous autoregressive (SAR) covariance structure $u \sim N(0, \sigma_u^2 [(I - \rho W)(I - \rho W^T)]^{-1})$ where W is a queen-contiguity matrix. Estimation was performed with `ebLupSFH()`.

4. Bayesian BYM2 model: cases were modelled as $Y_i \sim \text{Poisson}(E_i \rho_i)$ with $\log(\rho_i) X_i^T \beta + b_i$. The random effect b_i was decomposed à la BYM2 into a scaled structured spatial component and an unstructured component. Inference was carried out with INLA using the `INLA` package, and the inverse-distance weight matrix (selected among six candidates) was adopted based on preliminary WAIC comparisons.

Model performance was evaluated through RMSE, CV, WAIC, and DIC. A parametric bootstrap (200 replicates) was attempted for MSE estimation of the FH predictors but failed in most instances because the estimated random-effect variance was zero; therefore, RMSE and Bayesian posterior variance were used as uncertainty measures. Sampling variance sensitivity was examined by multiplying the baseline Poisson variance v_i by 0.5 and 2 and recomputing EBLUPs. Posterior relative risk and standard deviation maps were produced for all months and seasons by joining the model outputs to the county shapefile in ArcGIS Pro.

Results and Discussion

Monthly COVID-19 counts exhibited pronounced seasonal and spatial variability, with maximum values observed in autumn and summer waves and minima in spring. The direct estimator showed substantial within-county variation, reflecting the Poisson nature of the data. The non-spatial FH model yielded a mean seasonal RMSE of 3.44, while the SFH model converged in 33 of 36 months and provided only a marginal improvement (mean RMSE 3.39 vs. 3.59 for the same 33 months), indicating limited benefit of spatial autocorrelation in a very small- N setting. In contrast, the Bayesian BYM2 model with inverse-distance weights consistently outperformed all other approaches: it achieved the lowest RMSE in every selected month and, over 13 seasons, reduced the median RMSE

by an average of 38% relative to FH. The WAIC of the BYM2 model was also consistently lower than that of the IID Poisson-lognormal model, confirming the value of accounting for spatial dependence. Maps of posterior relative risk and standard deviation revealed high-risk clusters in central and northern counties, with low uncertainty (posterior SD < 0.3) in populous areas such as Sanandaj and wider credible intervals in sparsely populated counties like Sarvabad.

The sensitivity analysis showed that, on average, doubling the sampling variance produced negligible changes in EBLUP estimates at the provincial level (mean change < -0.2%). However, local sensitivity was notable in low-incidence counties: for Sarvabad in May 2020, a doubling of variance led to a 10% decrease in the estimated case count (from 28.5 to 25.6). This finding aligns with theoretical expectations, as the weight assigned to the direct estimate in the FH composite is proportional to $\frac{v_i}{v_i + \sigma_u^2}$; when σ_u^2 is relatively stable across areas, changes in v_i have a larger impact where counts are small. The BYM2 model inherently bypasses this issue by modelling the full Poisson likelihood.

The superiority of the BYM2 model can be attributed to three factors: (a) it avoids the Gaussian approximation of log-transformed counts, which is especially problematic when counts are low; (b) the hierarchical spatial decomposition allows stable borrowing of information across neighbouring counties, which is particularly valuable in a province with a clear neighbourhood structure; and (c) the Bayesian framework with weakly informative priors prevents variance components from being estimated as zero, a frequent occurrence in the FH models with N=10. The negligible gain of the SFH over the FH model is consistent with the difficulty of reliably estimating the spatial autoregressive parameter β with only 10 areal units, echoing earlier warnings in the SAE literature (Porter et al., 2015).

These findings have direct implications for sub-provincial infectious disease surveillance. The BYM2 model, implemented with freely available R packages, can generate more accurate and uncertainty-informed estimates of disease incidence in small areas, thereby supporting better targeted resource allocation. Where Bayesian computational infrastructure is unavailable, the FH model remains a relatively stable alternative, provided that estimates for low-population areas are interpreted with caution. Future research should extend this framework to spatio-temporal models that simultaneously capture spatial and temporal dependencies, explore zero-inflated approaches for regions with very low counts, and conduct systematic simulation studies to determine the minimum number of areas required for spatial models to outperform non-spatial alternatives.

Conclusion

This study demonstrated that hierarchical Bayesian spatial models, particularly BYM2, outperform classical FH and SFH models for small-area estimation of COVID-19 cases when the number of spatial units is extremely limited. The BYM2 model provided consistent reductions in prediction error, superior information criteria, and direct quantification of local uncertainty through posterior distributions. The marginal benefit of the spatial FH model underscores the challenges of estimating spatial dependence with very few areas. Sampling variance sensitivity, although modest on average, can be locally important and is fully accommodated by the Bayesian Poisson framework. These results support the adoption of Bayesian spatial SAE models as a methodological standard for routine sub-provincial health monitoring, especially in resource-constrained settings. Extending this approach to spatio-temporal contexts and validating it through simulation studies are important next steps.

Acknowledgements

The authors extend their sincere gratitude to all who contributed to the preparation of this manuscript.



ارزیابی مدل‌های کوچک ناحیه‌ای در برآورد موارد کووید-۱۹ با رویکرد بیزی و کلاسیک، مطالعه موردی استان کردستان

صالح آرخی^{۱*}، مختار جعفری^۱

^۱ گروه جغرافیا و سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی، علوم انسانی، گلستان، گرگان، ایران

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>تاریخچه مقاله:</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۲/۲۴</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۸/۰۶</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۸/۰۷</p>	<p>همه‌گیری کووید-۱۹ ضرورت تولید برآوردهای دقیق در مقیاس شهرستان را آشکار ساخت، اما مطالعات پیشین به‌ندرت مدل‌های ناحیه کوچک کلاسیک و بیزی را با تعداد بسیار اندک نواحی ($n=10$) به‌طور هم‌زمان مقایسه کرده‌اند. این پژوهش با هدف ارزیابی تطبیقی چهار چارچوب برآورد مستقیم، فای-هریوت، فای-هریوت فضایی و مدل بیزی BYM2 (با تقریب INLA) در مدل‌سازی موارد ماهانه کووید-۱۹ در ۱۰ شهرستان استان کردستان طی ۳۶ ماه انجام شد. تحلیل مؤلفه‌های اصلی روی ۲۷ متغیر کمکی، چهار مؤلفه نخست را به‌عنوان متغیرهای توضیحی استخراج کرد. عملکرد مدل‌ها با RMSE، معیار WAIC و تحلیل حساسیت واریانس نمونه‌ای (ضرایب ۰/۵ و ۲) ارزیابی گردید. مدل BYM2 با ماتریس وزنی فاصله معکوس (از میان ۶ ماتریس همسایگی آزموده‌شده) به‌طور نظام‌مند بهترین عملکرد را نشان داد و میانه RMSE فصلی را به‌طور میانگین ۳۸ درصد نسبت به فای-هریوت کاهش داد. بهبود مدل فضایی فای-هریوت نسبت به نسخه غیرفضایی جزئی بود. تحلیل حساسیت آشکار ساخت که دوبرابر شدن واریانس نمونه‌ای در شهرستان‌های کم‌جمعیت، برآوردها را تا ۱۰ درصد تغییر می‌دهد. یافته‌ها بیانگر آن است که مدل‌های بیزی فضایی، به‌ویژه BYM2، حتی با تعداد اندک نواحی، برآوردهای پایدارتر و عدم قطعیت کمتری برای پایش همه‌گیری‌ها فراهم می‌کنند و می‌توانند مبنای تصمیم‌گیری در تخصیص منابع محلی قرار گیرند.</p>
<p>کلمات کلیدی:</p> <p>کووید-۱۹</p> <p>برآورد کوچک ناحیه‌ای</p> <p>مدل فای-هریوت</p> <p>BYM2</p> <p>INLA</p>	

مقدمه

همه‌گیری کووید-۱۹ ناتوانی نظام‌های سنتی مراقبت سلامت را در تولید برآوردهای معتبر برای نواحی جغرافیایی کوچک آشکار ساخت. در چنین مقیاس‌هایی، برآوردهای مستقیم به‌دلیل تعداد ناکافی نمونه غیرقابل‌اتکا می‌شوند (Rao & Molina, 2015).

تا اواسط سال ۲۰۲۴، بیش از ۷۷۰ میلیون مورد تأییدشده و ۷ میلیون مرگ در سطح جهان به ثبت رسید، اما بار واقعی بیماری در سطوح فرواستانی، به‌ویژه در کشورهای با درآمد کم و متوسط که با داده‌های اداری پراکنده و ناهمگن فضایی روبه‌رو هستند، همچنان ناشناخته مانده است (WHO, 2024). برای نمونه، ساتورا-بورگه و همکاران (Satorra Burguet, Saez & Barceló, 2024) نشان دادند که الگوهای فضایی-زمانی کووید-۱۹ در داخل یک استان می‌تواند به شدت ناهمگن باشد و استفاده از برآوردهای کلی استانی را برای تخصیص منابع محلی نامناسب سازد. چنین شکاف اطلاعاتی، تصمیم‌گیری درباره توزیع عادلانه منابع درمانی، طراحی مداخلات هدفمند غیردارویی و حتی ارزیابی اثربخشی کمپین‌های واکسیناسیون را در سطح اجتماعات محلی با دشواری روبه‌رو کرده است (Maino-Vieytes et al., 2023). این دشواری در نواحی روستایی و کم‌جمعیت دوجندان می‌شود، زیرا دسترسی نامتوازن به خدمات و جابه‌جایی ساکنان به مراکز خدماتی می‌تواند مسیرهای انتشار بیماری را تقویت کند (Nasire Zare, Parizadi & Hakimi, 2022). در نتیجه، توسعه چارچوب‌های آماری که بتوانند حتی با داده‌های محدود، برآوردهای دقیقی برای نواحی کوچک فراهم آورند، به یک ضرورت روش‌شناختی فوری بدل شده است. برآورد کوچک ناحیه‌ای^۱ به‌عنوان راه‌حلی استوار برای این چالش مطرح شده است؛ خانواده‌ای از فنون مدل‌محور که با فرض‌گیری قدرت آماری از حوزه‌های فضایی یا زمانی، برآوردهای قابل‌اعتمادی را برای مناطق با شمار اندک واحدهای فضایی تولید می‌کنند (Rao & Molina, 2015). در میان این روش‌ها، مدل ناحیه‌ای فای-هریوت (Fay & Herriot, 1979) که برآوردهای مستقیم را از طریق یک چارچوب اثرات آمیخته خطی به متغیرهای کمکی سطح ناحیه پیوند می‌زند، از پرکاربردترین رویکردهاست. تعمیم فضایی این مدل با وارد کردن اثرات تصادفی فضایی، همبستگی ناشی از ساختار همسایگی را منعکس می‌کند (Guha & Chandra, 2024). به‌موازات، مدل‌های سلسله‌مراتبی بیزی، به‌ویژه آن‌ها که با INLA^۲ برازش می‌شوند، در همه‌گیرشناسی محبوبیت یافته‌اند؛ مدل BYM و نسخه بازپارامتری‌شده آن (BYM2) تغییرات فضایی را به مؤلفه‌های ساختاریافته و بدون ساختار تجزیه می‌کنند و با کمّی‌سازی عدم قطعیت از طریق توزیع‌های پسین، چارچوبی انعطاف‌پذیر برای نقشه‌برداری خطر بیماری فراهم می‌آورند (Riebler, Sørbye, Simpson & Rue, 2016; Rue, Martino & Chopin, 2009). مطالعات اخیر بر روی داده‌های کووید-۱۹، موفقیت این مدل‌ها را در برآورد نرخ مرگ‌ومیر و شناسایی خوشه‌های فضایی نشان داده‌اند (Rathnayake et al., 2022; Briz-Redón et al., 2023; al., 2023). باوجود این پیشرفت‌ها، شکاف پژوهشی مهمی باقی مانده است: عملکرد نسبی روش‌های کلاسیک فراوانی‌گرای فای-هریوت و فای-هریوت فضایی و مدل‌های بیزی سلسله‌مراتبی (BYM2) در پایش بیماری‌های عفونی با تعداد بسیار محدود واحدهای فضایی (کمتر از ۱۵ ناحیه) به‌ندرت مقایسه شده است. بیشتر مطالعات تطبیقی یا بر مناطقی با تعداد متوسط تا زیاد نواحی متمرکز بوده‌اند یا صرفاً بر شبیه‌سازی استوارند و با داده‌های واقعی همه‌گیری اعتبارسنجی نشده‌اند (Burgard et al., 2022). همچنین، حساسیت مدل‌های فای-هریوت به نحوه تعیین واریانس نمونه‌ای - پارامتری که تحت فرض پواسون و با شمار اندک موارد به‌دشواری برآورد می‌شود - در ادبیات کاربردی به‌اندازه کافی واکاوی نشده است (Marcis, Pagliarella & Salvatore, 2023). افزون بر این، هرچند تحلیل مؤلفه‌های اصلی^۳ برای کاهش هم‌خطی متغیرهای کمکی در عمل رایج است، کاربرد آن در مقایسه‌های نظام‌مند مدل‌های کوچک ناحیه‌ای برای تحلیل فضایی بیماری به‌طور رسمی ادغام نشده است (Jolliffe & Cadima, 2016). هدف اصلی این پژوهش، پر کردن شکاف‌های یادشده از طریق یک ارزیابی تطبیقی دقیق است. به‌طور مشخص، عملکرد چهار چارچوب مدل‌سازی در برآورد موارد ماهانه و فصلی کووید-۱۹ در ۱۰ شهرستان استان کردستان طی ۳۶ ماه (اسفند ۱۳۹۸ تا بهمن ۱۴۰۱) مقایسه می‌شود: (۱) برآورد مستقیم، (۲) مدل فای-هریوت غیرفضایی با متغیرهای کمکی حاصل از مولفه‌های اصلی، (۳) مدل فضایی فای-هریوت با ماتریس همسایگی مبتنی بر مجاورت، و (۴) مدل بیزی BYM2 با رهیافت INLA و با آزمون چندین

1- Small Area Models (SAE)

2- Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)

3- Principal Component Analysis (PCA)

ماتریس وزن فضایی. ارزیابی با یک چارچوب چندمعیاره شامل $RMSE^1$ ، CV^2 ، $WAIC^3$ ، DIC^4 ، انحراف معیار پسین و تحلیل حساسیت واریانس نمونه‌ای (با ضرایب ۰/۵ و ۲) انجام می‌شود. (Pfeffermann, Glickman & Preminger, 2024). بر این اساس، پرسش‌های اصلی پژوهش عبارت‌اند از: (۱) آیا لحاظ کردن ساختار فضایی (از طریق فای-هریوت فضایی یا BYM2) در شرایط تعداد بسیار اندک نواحی ($N=10$) به بهبود معنادار دقت پیش‌بینی می‌انجامد؟ و (۲) برآوردهای EBLUP مدل فای-هریوت تا چه اندازه نسبت به انتخاب واریانس نمونه‌ای حساس هستند و در چه شرایطی مدل‌های بیزی سلسله‌مراتبی پایداری استنباطی بیشتری ارائه می‌دهند؟

منطقه مورد مطالعه

پژوهش حاضر در استان کردستان، واقع در نیمه غربی ایران و در همسایگی کشور عراق، به اجرا درآمد. این استان با گستره تقریبی ۲۹۱۳۷ کیلومتر مربع، سیزدهمین استان کشور از نظر وسعت به‌شمار می‌رود و در واپسین سرشماری (۱۴۰۱) جمعیتی نزدیک به ۱/۶ میلیون تن را در خود جای داده است (Kurdistan Province Management and Planning Organization [KPMO], 2022). ساختار اداری استان از ۱۰ شهرستان، ۳۱ بخش، ۳۳ شهر، ۸۶ دهستان و ۱۸۸۶ آبادی تشکیل شده است که در این میان، بیجار با ۵۸۳۷ کیلومتر مربع پهناورترین و سروآباد با ۱۰۸۷ کیلومتر مربع کوچک‌ترین واحد شهرستانی محسوب می‌شوند. از منظر طبیعی، استان کردستان سرزمینی عمدتاً کوهستانی است که دشت‌های مرتفع و دره‌های باز، سیمای ناهموار آن را شکل داده‌اند. دامنه ارتفاعی از نزدیک به ۹۰۰ متر در منطقه آلوت (بانه) تا ۳۳۰۰ متر در قله کوه شاهو متغیر است و این شیب بلند، اقلیم‌های متفاوتی را در پهنه استان پدید آورده است (Nabiyouni, Hassanabadi & Farajirad, 2022). بر پایه داده‌های هشت ایستگاه همدیدی فعال در سال ۱۴۰۱، میانگین سالانه دما از ۹/۲ درجه سلسیوس در زرینه‌آب‌اتو تا ۱۵/۴ درجه سلسیوس در سنندج نوسان دارد؛ بیشینه دمای مطلق ثبت‌شده نیز ۴۲/۲ درجه در سنندج و کمینه آن ۲۱/۳- درجه در بانه و قروه گزارش شده است. بارش سالانه نیز گویای پراکندگی بالای اقلیمی است؛ برای نمونه، مریوان با ۶۸۴/۵ میلی‌متر بیشترین و قروه با ۲۱۱/۷ میلی‌متر کمترین دریافت بارش را در میان ایستگاه‌ها داشته‌اند. افزون بر این، تعداد روزهای یخبندان در طول سال از ۸۱ روز در سنندج تا ۱۲۵ روز در زرینه متغیر است (KPMO, 2022) استان از شمال به آذربایجان غربی و بخشی از زنجان، از جنوب به کرمانشاه، از شرق به همدان و زنجان، و از غرب با حدود ۲۳۰ کیلومتر مرز خاکی مشترک به کشور عراق محدود می‌شود. چنین تنوع توپوگرافیک و اقلیمی، بستر ناهمگنی برای پویایی انتقال بیماری‌های عفونی فراهم می‌کند و استان کردستان را به نمونه مطالعاتی ارزشمندی برای اجرای مدل‌های ناحیه‌کوچک در زمینه پایش همه‌گیری کووید-۱۹ تبدیل می‌سازد. شکل ۱ موقعیت استان را در نقشه ایران نمایش می‌دهد.

مواد و روش‌ها

پژوهش حاضر از نوع کمی-تحلیلی با طرح طولی گذشته‌نگر است که به مقایسه‌ی عملکرد چهار چارچوب برآورد ناحیه‌کوچک در مدل‌سازی موارد ماهانه و فصلی کووید-۱۹ می‌پردازد. جامعه‌ی آماری شامل تمامی موارد تأییدشده‌ی آزمایشگاهی کووید-۱۹ در ۱۰ شهرستان استان کردستان (بانه، بیجار، دهگلان، دیواندره، سقز، سنندج، سروآباد، قروه، کامیاران و مریوان) از اسفند ۱۳۹۸ (مارس ۲۰۲۰) تا بهمن ۱۴۰۱ (فوریه‌ی ۲۰۲۳) به مدت ۳۶ ماه است. داده‌های موارد ابتلا به‌صورت ماهانه از سامانه‌ی مدیریت داده‌های کووید-۱۹ دانشگاه علوم پزشکی کردستان گردآوری و در قالب فایل اکسل ذخیره گردید. برای هر ماه، ۲۷ متغیر کمکی اقتصادی-اجتماعی، جمعیت‌شناختی، بهداشتی و اقلیمی در کنار شناسه‌ی شهرستان و تعداد موارد ثبت شده است. محدوده‌ی

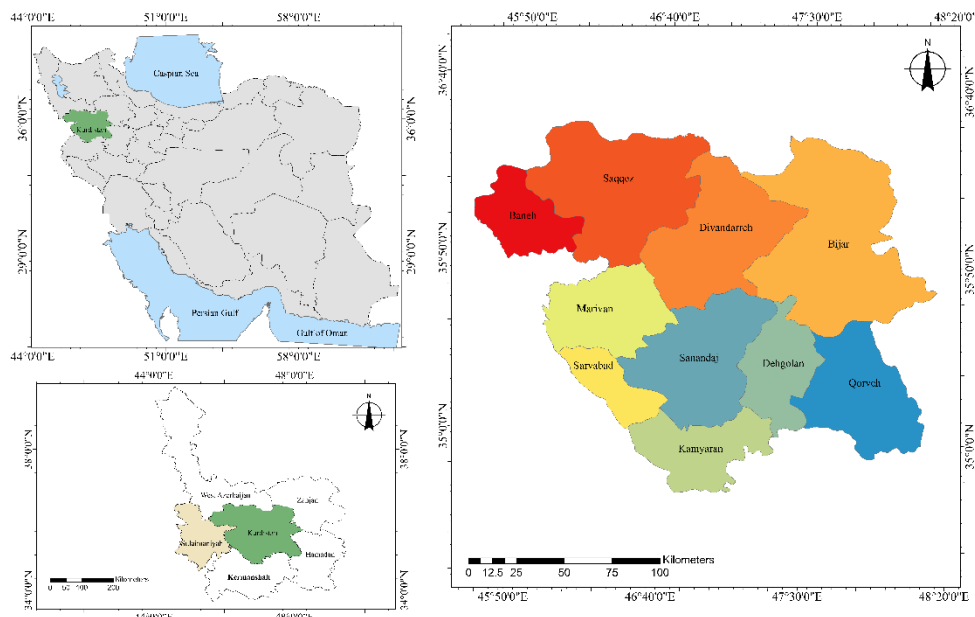
1- Root Mean Square Error

2- CV (typically "Coefficient of Variation" in small area estimation; keep as CV if that is its established meaning)

3- Watanabe-Akaike Information Criterion (also called Widely Applicable Information Criterion)

4- Deviance Information Criterion

جغرافیایی به دلیل تنوع اقلیمی، ساختار فضایی مناسب و وجود نظام ثبت یکپارچه، گزینه‌ای مطلوب برای تحلیل‌های فضایی با شمار اندک نواحی ($N=10$) محسوب می‌شود (Rao & Molina, 2015).



شکل ۱- موقعیت محدوده مورد مطالعه

Fig. 1. Location of the study area

پیش‌پردازش متغیرهای کمکی و داده‌های فصلی

با هدف کاهش هم‌خطی و ابعاد فضای متغیرها، تحلیل مؤلفه‌های اصلی بر روی ۲۷ متغیر کمکی اولیه با بهره‌گیری از تابع precomp در بسته stats نرم‌افزار R (نسخه ۴.۴.۳) انجام شد (Jolliffe & Cadima, 2016) چهار مؤلفه‌ی نخست ($PC4$ تا $PC1$) که مجموعاً بیش از ۸۰٪ از واریانس تجمعی را تبیین می‌کردند، به‌عنوان متغیرهای توضیحی در تمام مدل‌ها به‌کار گرفته شدند. تحلیل مؤلفه‌های اصلی روی کل دوره‌ی ۳۶ ماهه اجرا گردید تا ساختار عاملی یکسانی برای تمام ماه‌ها و فصل‌ها حفظ شود. برای تحلیل‌های فصلی، موارد ابتلا به‌صورت مجموع سه‌ماهه (متناظر با الگوی اقلیمی) تجمیع و مؤلفه‌های اصلی به‌صورت میانگین ساده کوچک ناحیه‌ای هر فصل محاسبه شدند (Marcis, 2023). دوره کوچک ناحیه‌ای مطالعه ۱۳ فصل تقویمی، از زمستان ۱۳۹۸ تا زمستان ۱۴۰۱، را در بر می‌گیرد. با توجه به آغاز ثبت داده‌های بیماری از اسفندماه، فصل نخست تنها یک ماه (اسفند ۱۳۹۸) را شامل می‌شود. فصل پایانی نیز به دلیل انتهای بازه کوچک ناحیه‌ای مطالعه، دو ماه (دی و بهمن ۱۴۰۱) را پوشش می‌دهد. یازده فصل دیگر، فصول کامل سه ماهه هستند.

مدل‌های رقیب و نحوه‌ی برآورد

چهار مدل مجزا برای هر ماه (۳۶ ماه) و هر فصل (۱۳ فصل) برازش شدند:

- برآورد مستقیم^۱ - میانگین موارد مشاهده‌شده‌ی هر شهرستان در ماه/فصل، به‌عنوان خط پایه^۲ محاسبه گردید.
- مدل فای-هریوتغیر فضایی - مدل سطح ناحیه‌ای استاندارد (Fay & Herriot, 1979) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_i = X_i^T \beta + u_i + e_i \quad (۱)$$

$$u_i \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (۲)$$

$$e_i \sim N(0, \sigma_e^2) \quad (۳)$$

که در آن y_i لگاریتم تعداد موارد (پس از نرمال سازی)، x_i بردار متغیرهای کمکی (PC1-PC4)، β ضرایب ثابت، u_i اثر تصادفی ناحیه‌ای و v_i واریانس نمونه‌ای شناخته شده است. با فرض پواسون برای موارد ابتلا، v_i برابر با تعداد موارد ($cases_i$) در نظر گرفته شد (Boubeta et al., 2016). برآورد مؤلفه واریانس σ_u^2 با روش حداکثر درستنمایی محدود شده^۱ و پیش‌بینی EBLUP برای $\theta_i = X_i^T \beta + u_i$ با استفاده از تابع eblupFH() از بسته sae صورت گرفت (Molina & Marhuenda, 2015). در مواردی که واریانس اثر تصادفی صفر برآورد می‌شد، برآوردگر عملاً به میانگین وزنی ساده میل می‌کرد.

– مدل فای-هریوت فضایی-با افزودن همبستگی فضایی میان اثرات تصادفی u_i طبق یک فرایند خودرگرسیون^۲ همزمان:

$$u \sim N\left(0, \sigma_u^2 \left[(I - \rho W)(I - \rho W^T) \right]^{-1} \right) \quad (۴)$$

که ρ پارامتر خودهمبستگی فضایی و W ماتریس وزن فضایی مبتنی بر مجاورت ماتریس ملکه است. ماتریس مجاورت از لایه‌ی شیپ‌فایل شهرستان‌ها با تابع poly2nb() و nb2listw() در بسته‌ی spdep تولید گردید (Bivand, Pebesma & Gómez-Rubio, 2013). برآورد پارامترها و EBLUP فضایی با فراخوانی eblupSFH() از بسته‌ی sae انجام شد.

– مدل بیزی BYM2 با تقریب INLA – برای انعطاف‌پذیری بیشتر، مدل سلسله‌مراتبی بیزی روی مقیاس شمارشی با در نظر گرفتن ساختار فضایی برازش گردید. موارد ابتلا به صورت پواسون مدل سازی شدند:

$$Y_i \sim \text{Poisson}(E_i \rho_i) \quad (۵)$$

$$\log(\rho_i) = \eta_i = X_i^T \beta + b_i \quad (۶)$$

که E_i تعداد مورد انتظار (به طور پیش فرض میانگین جمعیتی کل دوره)، ρ_i خطر نسبی، و b_i اثر تصادفی فضایی-غیرفضایی است (Riebler et al., 2016). برای پارامتری سازی BYM2 اثر b_i به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\sqrt{\phi} \mathbf{v}_* + \sqrt{1-\phi} \mathbf{u}_* \right) \quad (۷)$$

که τ دقت نهایی، $\phi \in [0, 1]$ سهم مؤلفه‌ی فضایی ساختاریافته، $\mathbf{v}_*$ یک میدان ذاتی خودرگرسیون مقیاس شده بر اساس گراف همسایگی، و $\mathbf{u}_*$ متغیرهای نرمال استاندارد مستقل است. برای مؤلفه‌ی فضایی، از میان ۱۰ وزن فضایی مختلف، وزن فاصله معکوس که کمترین WAIC را در تحلیل‌های مقدماتی نشان داد، انتخاب گردید. گراف همسایگی با nb2INLA() ساخته و مدل با استفاده از تابع inla() در بسته‌ی INLA برازش گردید (Rue et al., 2009). برای پارامترهای آزاد از توزیع‌های پیشین غیراطلاعاتی^۳ $\text{LogGamma}(1, 0.01)$

1- REML

2- Spatial Autoregressive (SAR)

3- Non-informative

برای دقت‌ها و $Beta(1, 1)$ برای ϕ استفاده شد. تقریب INLA توزیع‌های پسین نهایی^۱ برای هر پارامتر را برای تمامی پارامترها و پیش‌بینی‌ها فراهم نمود. جهت حفظ خاصیت پواسون، داده‌های ماهانه با مجموع موارد و داده‌های فصلی نیز با مجموع موارد (به‌جای میانگین) وارد مدل شدند.

معیارهای ارزیابی و تحلیل‌های تکمیلی

برای ارزیابی عملکرد مدل‌ها، یک چارچوب چندمعیاره به‌شرح زیر استفاده گردید:

- دقت نقطه‌ای: ریشه‌ی میانگین مربعات خطا $(RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2})$ و ضریب تغییرات $(CV = SD(\hat{y}) / mean(\hat{y}))$ برای کلیه‌ی مدل‌ها در هر ماه/فصل محاسبه شد.
- برازش مدل‌های بیزی: معیار WAIC و DIC از خروجی inla استخراج و برای مقایسه‌ی مدل IID^۲ (بدون ساختار فضایی) با BYM2 استفاده شد (Watanabe, 2010).
- عدم قطعیت فضایی: برای مدل BYM2، انحراف معیار پسین^۳ به‌عنوان معیاری از خطای برآورد در هر شهرستان استخراج و با MSE مدل‌های فای-هریوت مقایسه گردید. شایان ذکر است که بوت‌استرپ پارامتریک برای برآورد MSE مدل‌های فای-هریوت (با ۲۰۰ تکرار، Pfeffermann et al., 2024) به دلیل برآورد صفر برای واریانس اثر تصادفی در اغلب ماه‌ها و فصول با $N=10$ امکان‌پذیر نشد؛ از این‌رو، RMSE و واریانس پسین بیزی جایگزین گشتند.
- تحلیل حساسیت واریانس نمونه‌ای: برای سنجش پایداری برآوردهای فای-هریوت، واریانس پایه‌ی پواسونی v_i در ضرایب 0/5 و ۲ ضرب شد و مدل مجدداً برازش گردید. درصد تغییر برآورد EBLUP برای هر شهرستان و ماه/فصل ثبت و با نمودارهای خطی به تفکیک ضریب ترسیم گردید (Marcis et al., 2023).
- نقشه‌های خطر نسبی و عدم قطعیت: نقشه‌ی خطر نسبی پسین (میانهِ $\exp(\eta_i)$) و نقشه‌ی انحراف معیار پسین برای مدل BYM2 با الحاق داده‌های جدولی به شیپ فایل در محیط ArcGIS Pro برای همه ماه‌ها و فصول ترسیم گردید. این نقشه‌ها امکان ارزیابی بصری الگوهای مکانی ریسک و میزان اعتماد به برآوردها را فراهم آوردند (Moraga, 2018).
- تمامی تحلیل‌ها با بسته‌های sf، spdep، sae، INLA، ggplot2، dplyr، tidyr و openxlsx در محیط R (نسخه‌ی ۴.۴.۳) انجام شد. با توجه به استفاده از داده‌های تجمیعی و فاقد اطلاعات بیمارستانی یا فردی، اخذ تأییدیه‌ی اخلاقی موضوعیت نداشت.

نتایج و بحث

آمار توصیفی و توزیع فضایی-زمانی

موارد تأییدشده ماهانه کووید-۱۹ در ۱۰ شهرستان استان کردستان از اسفند ۱۳۹۸ تا بهمن ۱۴۰۱ دامنه‌ای از ۵ مورد (سروآباد، خرداد ۱۴۰۱) تا ۴۴۷۰ مورد (سنندج، شهریور ۱۴۰۰) را در بر می‌گیرد و الگوی فصلی آشکاری نشان می‌دهد: بیشینه موارد در پاییز و تابستان و کمینه آن در بهار و زمستان ثبت شده است. برآوردهای مستقیم (موارد مشاهده‌شده) تغییرپذیری درون‌شهرستانی قابل‌توجهی دارند که بازتاب‌دهنده ماهیت پواسون گونه داده‌ها و تأثیر جمعیت اندک برخی شهرستان‌هاست. پراکندگی بالا در کنار تعداد کم نواحی ($n=10$) به کارگیری مدل‌های ناحیه‌کوچک را برای پایدارسازی برآوردها ضروری می‌سازد.

عملکرد مدل پایه

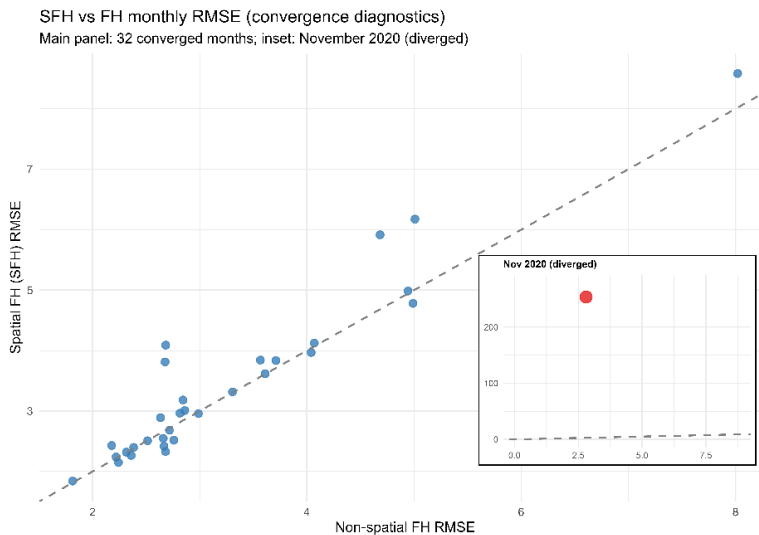
مدل فای-هریوت غیرفضایی به‌عنوان مدل پایه کلاسیک برازش شد. در ۱۳ فصل مورد بررسی، میانگین RMSE برای فای-هریوت برابر با ۳.۴۴ و میانه ضریب تغییرات نزدیک به ۱ به‌دست آمد. مدل فای-هریوت فضایی که یک ساختار خودرگرسیون همزمان

1- Marginal

2- Independent and Identically Distributed

3- posterior SD

فضایی را در بر می‌گیرد، برای ۳۳ ماه از ۳۶ ماه قابل برآورد بود (سه ماه به دلیل عدم همگرایی کنار گذاشته شدند). مقایسه نقطه‌ای RMSE برای ماه‌هایی که فای-هریوت فضایی همگرا شده است، در جدول ۱ ارائه شده و الگوی پراکندگی این مقادیر در شکل ۲ ترسیم گردیده است؛ نقطه قرمز رنگ (آبان ۱۳۹۹) بیانگر واگرایی شدید مدل فضایی است.



شکل ۲- نمودار همگرایی/واگرایی مدل فای-هریوت غیرفضایی در برابر مدل فای-هریوت فضایی

Fig. 2. Convergence/divergence plot of the Fay-Herriot model versus the spatial Fay-Herriot model

هر نقطه نمایانگر یک ماه (از اسفند ۱۳۹۸ تا بهمن ۱۴۰۱) است. خط چین خاکستری نشان‌دهنده برابری RMSE دو مدل است. نقطه قرمز (آبان ۱۳۹۹) واگرایی شدید مدل فضایی را با $RMSE=253.68$ نشان می‌دهد. نقاط آبی ماه‌هایی هستند که مدل فای-هریوت فضایی با موفقیت همگرا شده است. محور افقی RMSE: مدل غیرفضایی؛ محور عمودی RMSE: مدل فضایی. محور RMSE به صورت لگاریتمی رسم شده است. با کنارگذاشتن ماه ناپایدار آبان ۱۳۹۹ ($RMSE=253.7$)، میانگین نسخه فضایی برابر ۳/۳۹ در مقایسه با ۳/۵۹ برای نسخه غیرفضایی در همان ماه‌ها بود.

مقادیر RMSE برای ۳۲ ماه از ۳۶ ماه (اسفند ۱۳۹۸ تا بهمن ۱۴۰۱) که مدل فای-هریوت فضایی با موفقیت برآورد شده است، گزارش شده‌اند. ماه‌های با عدم همگرایی با عنوان «واگرا» مشخص گردیده‌اند. نقطه پرت مربوط به آبان ۱۳۹۹ ($RMSE=253.68$) نشان‌دهنده شکست کامل برآورد پارامتر خودهمبستگی فضایی در این ماه است؛ مدل فای-هریوت غیرفضایی؛ مدل فای-هریوت فضایی با ماتریس مجاورت وزیر. داده‌ها مربوط به ۱۰ شهرستان استان کردستان می‌باشند.

مقدار RMSE مدل فضایی فای هریوت در آبان ۱۳۹۹ (253.68) یک نقطه‌ی وردای آشکار است که نشان‌دهنده‌ی ناپایداری شدید برآوردها در آن ماه خاص می‌باشد. تحلیل جزئی‌نگار داده‌ها نشان داد که در این ماه، توزیع موارد ابتلا به شدت در یک یا دو شهرستان (به‌ویژه سنندج) متمرکز بوده و همزمان شمار موارد در برخی شهرستان‌های همسایه بسیار پایین گزارش شده است. تحت چنین الگوی فضایی به شدت کانونی، ماتریس همبستگی فضایی مبتنی بر مجاورت عملاً همگنی موضعی را نقض می‌کند و پارامتر خودهمبستگی فضایی (p) به کرانه‌ی بالای ۱ میل می‌کند. در این شرایط، ماتریس کوواریانس اثرات تصادفی فضایی تقریباً تکینه (singular) می‌شود که منجر به واگرایی الگوریتم برآورد و تولید پیش‌بینی‌های بی‌اندازه پرت می‌گردد. این یافته هشدار کاربردی است مبنی بر اینکه مدل‌های فضایی کلاسیک با تعداد اندک نواحی در ماه‌هایی که الگوی همه‌گیری فوق‌العاده خوشه‌ای می‌شود، آسیب‌پذیرند و نمی‌توان به خروجی آن‌ها اعتماد کرد. این بهبود حاشیه‌ای نشان می‌دهد که در شرایط تعداد بسیار اندک نواحی ($n=10$)، مزیت افزودن ساختار خودهمبستگی فضایی به چارچوب فراوانی‌گرا محدود است. همان‌گونه که پورتر و همکاران (Porter,

(Holan, Wikle & Cressie, 2015) هشدار داده‌اند، برآورد پایدار پارامتر خودهمبستگی فضایی (p) نیازمند تعداد کافی نواحی است و با تنها ۱۰ شهرستان، ماتریس وزن فضایی به‌سختی قابل شناسایی می‌شود. هر دو نسخه فای-هریوت در ماه‌های با شمار موارد بسیار اندک خطایی به‌مراتب بیش از برآورد مستقیم داشتند که محدودیت فروض گاوسی را برای شمارش‌های ناحیه‌کوچک برجسته می‌کند.

جدول ۱- مقایسه RMSE مدل فضایی فای-هریوت با مدل غیرفضایی

Table 1- Comparison of RMSE between the spatial and non-spatial Fay-Herriot models

ماه	RMSE (فای-هریوت)	RMSE (فای-هریوت فضایی)	وضعیت همگرایی
Month	RMSE (Fay-Herriot)	RMSE (Spatial Fay-Herriot)	Convergence Status
March 2020	2/24	2/15	Successful
April 2020	2/68	3/81	Successful
May 2020	3/71	3/83	Successful
June 2020	4/68	5/92	Successful
August 2020	2/76	2/52	Successful
September 2020	4/99	4/78	Successful
October 2020	8/02	8/58	Successful
November 2020	2/81	253/68	Divergent
December 2020	2/66	2/55	Successful
January 2021	3/31	3/32	Successful
February 2021	2/99	2/96	Successful
March 2021	2/84	3/18	Successful
April 2021	2/68	2/33	Successful
May 2021	2/36	2/27	Successful
June 2021	4/07	4/12	Successful
July 2021	2/63	2/89	Successful
August 2021	2/18	2/43	Successful
September 2021	2/72	2/68	Successful
October 2021	3/57	3/84	Successful
December 2021	2/68	4/09	Successful
January 2022	1/81	1/84	Successful
February 2022	5/01	6/17	Successful
March 2022	4/94	4/99	Successful
April 2022	4/04	3/97	Successful
May 2022	2/22	2/24	Successful
June 2022	2/38	2/40	Successful
July 2022	2/32	2/32	Successful
August 2022	3/61	3/62	Successful
September 2022	2/67	2/42	Successful
November 2022	2/51	2/51	Successful
January 2023	2/82	2/96	Successful
February 2023	2/86	3/01	Successful

مقایسه نظام‌مند مدل‌ها

چهار کلاس مدل به‌صورت نظام‌مند مقایسه شدند: برآورد مستقیم، فای-هریوت، مدل پواسون-لگ‌نرمال IID (برآوردشده با INLA) و مدل بی‌زی BYM2 با وزن فضایی معکوس فاصله. عملکرد هر یک از این مدل‌ها در شش ماه منتخب که نماینده فصول مختلف و سطوح گوناگون بروز هستند، در جدول ۲ گزارش شده است.

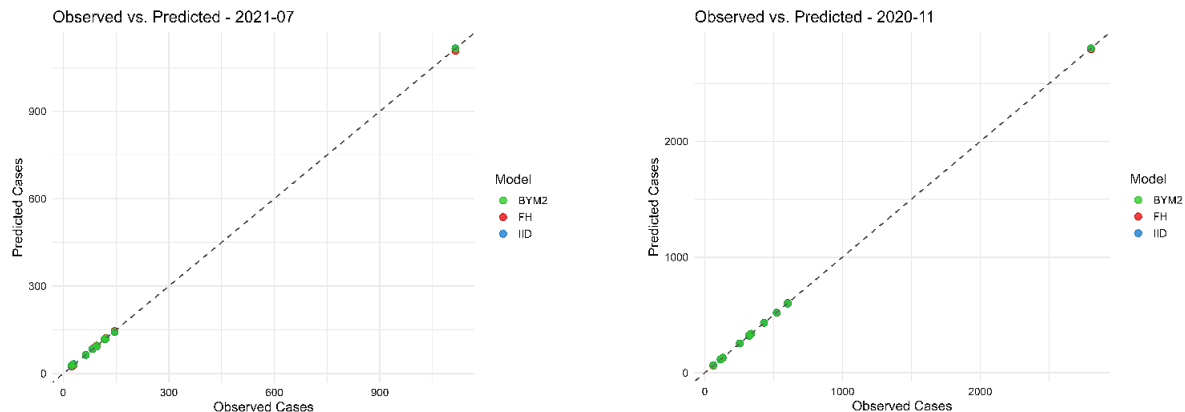
RMSE، ضریب تغییرات (CV) و معیار WAIC برای سه مدل در ماه‌های نماینده اوج همه‌گیری (آبان ۱۳۹۹ و شهریور ۱۴۰۰)، دوره گذار (اسفند ۱۳۹۸ و اسفند ۱۳۹۹) و دوره فروکش (تیر ۱۴۰۱ و بهمن ۱۴۰۱) ارائه شده است. WAIC برای مدل فای-هریوت به دلیل رویکرد فراوانی‌گرا قابل محاسبه نیست و با علامت «-» نشان داده شده است. مدل BYM2 در تمام ماه‌های منتخب کمترین RMSE را داشته و WAIC آن نیز همواره از IID کمتر است؛ بیشینه اختلاف WAIC به‌نفع BYM2 در شهریور ۱۳۹۹ و در تیر ۱۴۰۱ مشاهده می‌شود.

برای ارزیابی بصری دقت پیش‌بینی، مقادیر مشاهده‌شده در برابر برآورده‌شده برای دو ماه با بروز بالا (آبان ۱۳۹۹) و پایین (تیر ۱۴۰۱) در (شکل ۳) رسم شده است.

جدول ۲- عملکرد مدل‌های ناحیه کوچک با وزن معکوس فاصله در ۶ ماه منتخب

Table 2- Performance of small area models with the inverse-distance weight matrix in six selected months

ماه	مدل	RMSE	CV	WAIC
Month	Model			
March 2020	FH	2/24	1/02	-
	INLA_IID	1/41	1/02	71/02
	BYM2 (InvDist)	1/38	1/02	70/89
September 2020	FH	4/99	1/11	-
	INLA_IID	2/89	1/12	85/57
	BYM2 (InvDist)	2/17	1/12	81/87
November 2020	FH	2/81	1/45	-
	INLA_IID	2/11	1/45	93/19
	BYM2 (InvDist)	1/86	1/45	93/07
March 2021	FH	2/84	1/33	-
	INLA_IID	3/30	1/34	84/24
	BYM2 (InvDist)	2/44	1/34	81/50
July 2022	FH	2/32	1/85	-
	INLA_IID	4/07	1/87	71/14
	BYM2 (InvDist)	2/52	1/87	69/07
February 2023	FH	2/86	1/37	-
	INLA_IID	1/88	1/38	76/40
	BYM2 (InvDist)	1/67	1/38	75/38

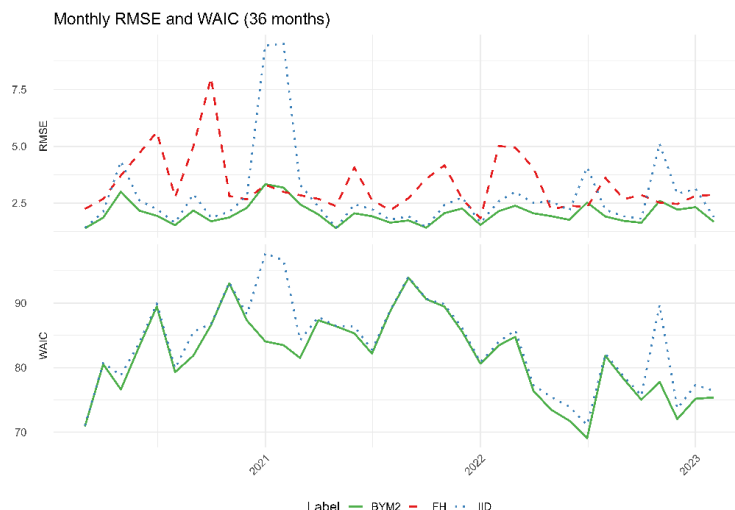


شکل ۳- نمودار پراکنش مقادیر مشاهده‌شده در برابر برآورده‌شده برای یک ماه با بروز بالا (آبان ۱۳۹۹) و یک ماه با بروز پایین (تیر ۱۴۰۱)

Fig. 3. Scatter plots of observed versus estimated values for a high-incidence month (November 2020; Aban 1399) and a low-incidence month (July 2022; Tir 1401)

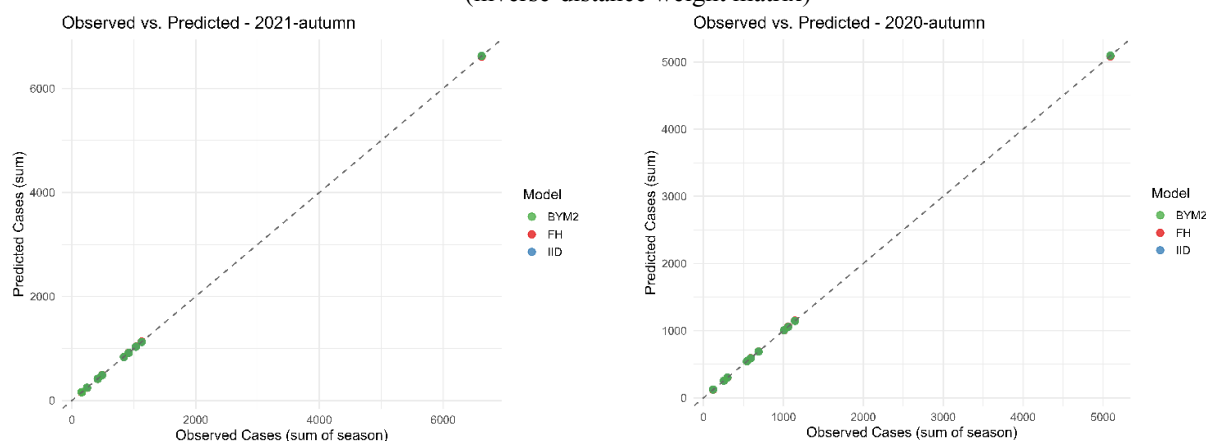
برآوردها برای سه مدل فای-هریوت، BYM2 و IID با ماتریس وزن معکوس فاصله رسم شده‌اند. خط چین مورب نشان‌دهنده تطابق کامل بین مقادیر مشاهده‌شده و برآورده‌شده است. روند ماهانه این معیارها برای تمام ۳۶ ماه نیز در شکل ۴ قابل مشاهده است. پهن بلایی RMSE و و پهن پایینی WAIC را نشان می‌دهد. WAIC برای مدل فای-هریوت به دلیل رویکرد فراوانی‌گرا در دسترس نیست و ترسیم نشده است. خط چین (فای-هریوت)، نقطه چین (IID) و خط توپر (BYM2) برای تمایز مدل‌ها به کار رفته است. در ۱۳ فصل تجمیعی، میانگین RMSE برای BYM2 برابر ۲/۱۰، برای IID برابر ۲/۴۸ و برای فای-هریوت برابر ۳/۴۴ بود. در مقایسه با فای-هریوت، مدل BYM2 میانه RMSE را ۳۸ درصد کاهش داد (دامنه ۲۲ تا ۴۹ درصد)؛ مدل IID کاهشی ۲۸ درصدی را نشان داد. معیار WAIC در تمام فصول مدل فضایی را تأیید کرد، هرچند اختلاف‌ها کوچک بود: بیشترین مزیت WAIC مدل

BYM2 نسبت به IID برابر $3/2$ واحد (پاییز ۱۴۰۱) به دست آمد. برای ارزیابی بصری دقت برآوردها در مقیاس فصلی، مقادیر مشاهده شده در برابر برآوردها برای فصول پاییز ۱۴۰۰ و پاییز ۱۴۰۱ در شکل ۵ رسم شده است.



شکل ۴- روند ۳۶ ماهه معیارهای ارزیابی RMSE و WAIC مدل‌های فای-هریوت، IID و BYM2 (ماتریس وزن فضایی معکوس فاصله)

Fig. 4. Thirty-six-month time series of RMSE and WAIC for the Fay–Herriot, IID, and BYM2 models (inverse-distance weight matrix)



شکل ۵- نمودار پراکنش مقادیر مشاهده شده در برابر برآوردها برای دو فصل پاییز ۱۴۰۰ (پربروزترین فصل) و پاییز ۱۴۰۱

Fig. 5. Scatter plots of observed versus estimated values for autumn 2021 (the highest-incidence season) and autumn 2022

برآوردهای فصلی برای مدل‌های فای-هریوت، IID و BYM2 با ساختار وزن معکوس فاصله بر اساس مجموع موارد سه ماهه و میانگین مؤلفه‌های اصلی محاسبه شده‌اند. خط چین مورب نشان‌دهنده تطابق کامل است.

از میان شش ماتریس وزن فضایی آزمون شده، وزن معکوس فاصله کمترین میانگین RMSE ($4/2$) را داشت و WAIC آن ($73/81$) تقریباً با ساختار همسایگی ملکه ($62/81$) یکسان بود.

برتری مستمر BYM2 را می‌توان به سه ویژگی ساختاری نسبت داد: (۱) مدل‌سازی کامل درستنمایی پواسون به جای تقریب گاوسی، که به‌ویژه در ماه‌های کم‌بروز از اریبی ناشی از تبدیل لگاریتمی و فروض نرمال جلوگیری می‌کند (Wakefield, 2007)؛ (۲)

ساختار سلسله‌مراتبی BYM2 با تجزیه اثرات تصادفی به مؤلفه‌های فضایی ساختاریافته و بدون ساختار، امکان قرض‌گیری اطلاعات از نواحی همسایه را فراهم می‌کند؛ و (۳) رویکرد بیزی با استفاده از توزیع‌های پیشین، حتی در شرایط اطلاعات نمونه‌ای محدود، از برآورد صفر برای مؤلفه‌های واریانس جلوگیری می‌کند — پدیده‌ای که در مدل‌های فای-هریوت با $N=10$ مکرراً مشاهده شد. این یافته‌ها با نتایج ریبلر و همکاران (Riebler et al., 2016) هم‌سو است و نشان می‌دهد که مزیت مدل‌های بیزی فضایی حتی در شرایط تنها ۱۰ ناحیه نیز پابرجاست.

برای نمایش انعطاف‌پذیری مدل‌ها در شهرستان‌های با بروز متفاوت، مقادیر مشاهده‌شده و برآوردهای فای-هریوت و IID برای سنندج (پربروز) و سروآباد (کم‌بروز) در جدول ۳ گردآوری شده است.

جدول ۳- مقادیر مشاهده‌شده و برآوردهای فصلی مدل‌های فای-هریوت و IID برای دو شهرستان نمونه (سنندج و سروآباد) در ۳۶ ماه
Table 3- Observed and seasonal fitted values from the Fay–Herriot and IID models for two selected counties (Sanandaj and Sarvabad) over 36 months.

IID	FH	مشاهده‌شده Observed	شهرستان County	فصل Season
115/73	115/99	115	Sanandaj	Winter 2020 (Mar 2020)
10/03	9/03	9	Sarvabad	
1604/91	1599/10	1602	Sanandaj	Spring 2020
99/94	92/69	94	Sarvabad	
2,600/76	2,589/63	2600	Sanandaj	Summer 2020
54/77	49/97	50	Sarvabad	
5094/41	5082/06	5093	Sanandaj	Autumn 2020
124/21	119/94	120	Sarvabad	
1,903/05	1,894/41	1903	Sanandaj	Winter 2021
69/55	60/93	61	Sarvabad	
3705/01	3693/96	3704	Sanandaj	Spring 2021
82/56	77/79	78	Sarvabad	
7929/49	7921/24	7929	Sanandaj	Summer 2021
130/97	126/88	127	Sarvabad	
6625/39	6613/25	6624	Sanandaj	Autumn 2021
160/10	154/97	155	Sarvabad	
2739/39	2726/44	2738	Sanandaj	Winter 2022
104/32	98/85	99	Sarvabad	
1582/74	1572/85	1581	Sanandaj	Spring 2022
34/24	28/80	29	Sarvabad	
2214/81	2202/85	2213	Sanandaj	Summer 2022
63/08	59/49	60	Sarvabad	
1503/52	1492/89	1502	Sanandaj	Autumn 2022
51/52	42/75	43	Sarvabad	
796/33	786/88	795	Sanandaj	Winter 2023
36/72	32/39	33	Sarvabad	

موارد ابتلای مشاهده‌شده به‌صورت مجموع سه‌ماهه و مؤلفه‌های اصلی به‌صورت میانگین فصلی محاسبه شده‌اند. سنندج به‌عنوان شهرستان پربروز و سروآباد به‌عنوان شهرستان کم‌بروز انتخاب شده‌اند. برآوردهای مدل BYM2 به‌دلیل عدم خروجی‌گیری در سطح فصلی، در این جدول گنجانده نشده‌اند.

انحراف معیار پسین حاصل از BYM2 معیاری مستقیم از عدم قطعیت فراهم کرد: در شهرستان‌های پرجمعیت مانند سنندج، انحراف معیار پسین عموماً کمتر از $0/3$ بود، درحالی‌که شهرستان‌های کم‌جمعیت (مانند سروآباد) فواصل باور عریض‌تری داشتند.

تحلیل حساسیت و استحکام‌سنجی

مدل فای-هریوت نیازمند واریانس‌های نمونه‌ای از پیش تعیین‌شده است که تحت مدل کاری پواسون برابر با تعداد موارد مشاهده‌شده قرار داده شد. برای ارزیابی حساسیت برآوردهای EBLUP به این فرض، واریانس‌ها در ضرایب $0/5$ و 2 ضرب و مدل

برای هر ماه مجدداً برازش شد. دوبرابر کردن واریانس ($2v_i \times$) به‌طور میانگین درصد تغییرات کمی در سطح شهرستان‌ها ایجاد کرد: میانگین درصد تغییر برآوردها (در سطح شهرستان‌ها) در تمام ماه‌ها از $-0/0$ تا $-0/2$ درصد متغیر بود (جدول ۴).

جدول ۴- تحلیل حساسیت برآوردهای EBLUP مدل فای-هریوت نسبت به دوبرابر شدن واریانس نمونه‌ای

Table 4- Sensitivity analysis of EBLUP estimates from the Fay-Herriot model to doubling of the sampling variance

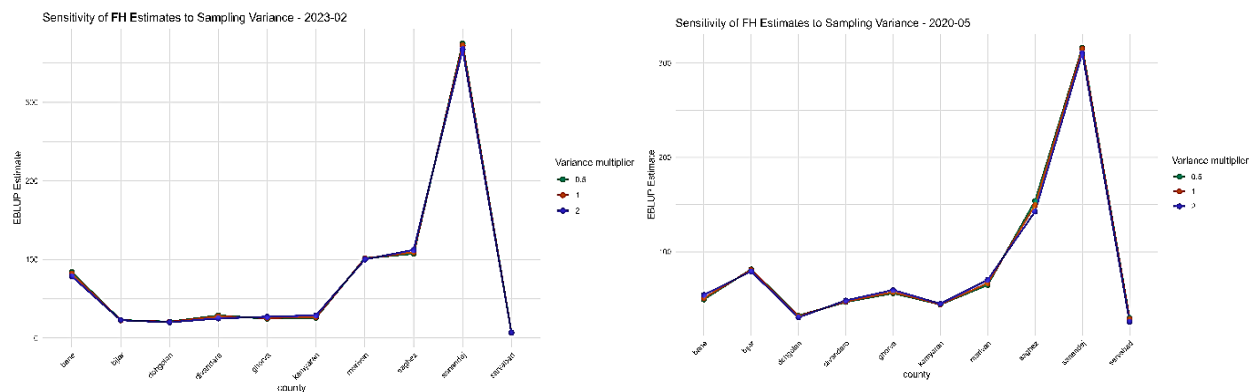
واریانس تصادفی	بیشینه تغییر مطلق (%)	میانگین تغییر (%)	ماه
Random Effect Variance	Maximum Absolute Change (%)	Mean Change (%)	Month
1662	4.1	0	March 2020
3208	2.8	0	April 2020
206	10	-0.2	May 2020
2534	3	0	June 2020
5769	1.5	0	July 2020
444	5.3	-0.1	August 2020
275	8.5	-0.2	September 2020
1146	4.1	-0.1	October 2020
60921	0.8	0	November 2020
16860	1.1	0	December 2020
1980	3.6	0	January 2021
4320	2.6	0	February 2021
2330	3.5	0	March 2021
3500	2.9	0	April 2021
8790	1.7	0	May 2021
3095	2.6	0	June 2021
6426	1.9	0	July 2021
42399	0.8	0	August 2021
109624	0.4	0	September 2021
48693	0.6	0	October 2021
11392	1.5	0	November 2021
7702	1.3	0	December 2021
2114	3.2	0	January 2022
1511	3	0	February 2022
2760	2.5	0	March 2022
1546	3.4	0	April 2022
2027	2.5	0	May 2022
1006	3.9	-0.1	June 2022
892	3.5	-0.1	July 2022
3855	1.8	0	August 2022
1950	2.5	0	September 2022
1962	2.9	0	October 2022
2889	2.3	0	November 2022
452	6.7	-0.1	December 2022
573	5.3	-0.1	January 2023
230	9.1	-0.2	February 2023

واریانس نمونه‌ای مبتنی بر فرض پواسون (برابر با موارد مشاهده‌شده) در سه سطح $0/5$ ، 1 (مرجع)، و 2 ضرب شده است. مقادیر گزارش‌شده شامل میانگین درصد تغییر برآوردها نسبت به حالت مرجع، بیشینه قدر مطلق درصد تغییر و واریانس تصادفی برآوردشده برای دوره مورد بررسی می‌باشد. مقادیر منفی نشان‌دهنده کاهش برآورد EBLUP پس از دوبرابر شدن واریانس است. واریانس تصادفی از مدل مرجع (ضریب ۱) استخراج و به عدد صحیح گرد شده است.

دوبرابر کردن واریانس به‌طور میانگین درصد تغییرات کمی در سطح شهرستان‌ها ایجاد کرد: میانگین درصد تغییر برآوردها (در سطح شهرستان‌ها) در تمام ماه‌ها از $-0/0$ تا $-0/2$ درصد متغیر بود (جدول ۴). اگرچه میانگین درصد تغییرات در سطح استان بسیار ناچیز (کمتر از $-0/2$ درصد) است، اما بیشینه تغییر مطلق 10 درصدی در شهرستان کم‌بروز و کم‌جمعیتی مانند سروآباد کاملاً معنادار و از منظر سیاستی قابل توجه است. برای نمونه، کاهش برآورد موارد از $28/5$ به $25/6$ در یک ماه می‌تواند به‌طور مستقیم بر محاسبات مربوط به تخصیص کیت تشخیصی، تخت بستری یا نیروی انسانی اثر بگذارد. بنابراین، در حالی که مدل فای هریوت در

سطح کلان استوار است، در شهرستان‌های کم‌جمعیت حاشیه خطای ناشی از عدم قطعیت واریانس نمونه‌ای بایستی به‌عنوان یک هشدار جدی در تفسیر برآوردها لحاظ گردد. این یافته بر ضرورت احتیاط مضاعف در استفاده از مدل‌های فای هرriot برای مناطق روستایی و کم‌بروز تأکید می‌کند. برای نمونه، در سروآباد در اردیبهشت ۱۳۹۹ (با ۳۱ مورد مشاهده‌شده)، برآورد فای هرriot با دوبرابر شدن واریانس از ۲۸/۵ به ۲۵/۶ مورد کاهش یافت (کاهش ۱۰ درصد)؛ در بهمن ۱۴۰۱ نیز همین شهرستان کاهش ۹/۱ درصدی نشان داد. برای دو ماه با بیشترین تغییر حداکثر (اردیبهشت ۱۳۹۹ و بهمن ۱۴۰۱)، برآوردهای فای-هرriot برای شهرستان‌ها در سه سطح واریانس نمونه‌ای در شکل ۶ مقایسه شده است.

برآوردهای EBLUP برای ۱۰ شهرستان استان کردستان در سه سطح واریانس نمونه‌ای (۵/۰، ۱ و ۲ برابر واریانس پایه پواسونی) رسم شده است. هر خط رنگی نمایانگر یک سطح واریانس است. این نمودارها حساسیت موضعی برآوردها را به‌ویژه در شهرستان‌های کم‌بروز نشان می‌دهند.



شکل ۶- تحلیل حساسیت برآوردهای فای-هرriot به تغییر واریانس نمونه‌ای برای دو ماه با بیشترین تغییرات (اردیبهشت ۱۳۹۹ و بهمن ۱۴۰۱)

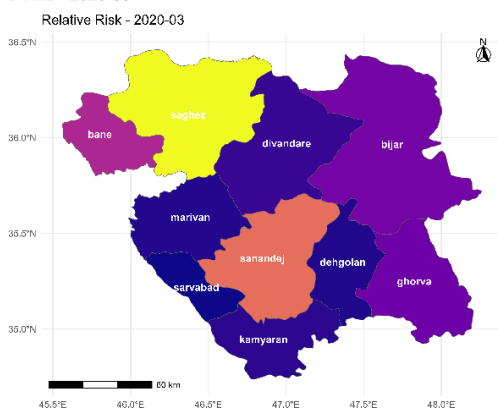
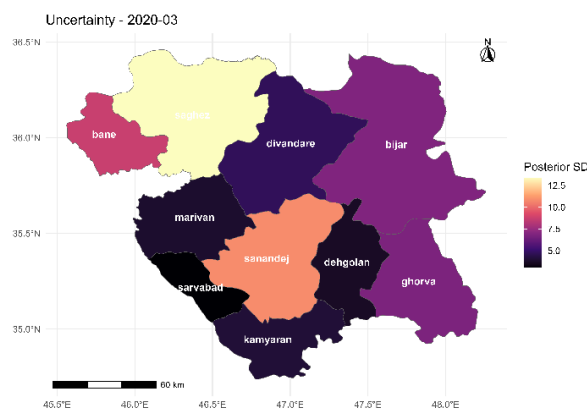
Fig. 6. Sensitivity of Fay-Herriot estimates to changes in sampling variance for the two months with the greatest variability (May 2020 and February 2023)

بزرگ‌تر بودن حساسیت در نواحی کم‌جمعیت با فرمول EBLUP قابل تبیین است: وزن برآورد مستقیم با نسبت واریانس نمونه‌ای (v_i) به واریانس کل $(v_i + \sigma^2_u)$ رابطه دارد. در شهرستان‌های با σ^2_u نسبتاً ثابت اما V_i کوچک، تغییر V_i تأثیر بیشتری بر برآورد نهایی می‌گذارد (Marcis et al., 2023). در مقابل، ماه‌های با موارد بسیار بالا نظیر شهریور ۱۴۰۰ بیشینه تغییر ناچیزی (۴/۰ درصد) داشتند، زیرا واریانس نمونه‌ای در این ماه‌ها در قیاس با واریانس اثر تصادفی (σ^2_u) بزرگ بود. همین عدم قطعیت در نواحی کم‌جمعیت، تصمیم‌گیری محلی را به بسترهای اجتماعی و نهادی مقاوم‌سازی جامعه گره می‌زند؛ پژوهش‌های داخلی نیز نشان داده‌اند که تاب‌آوری اجتماعی در برابر کووید-۱۹ از عوامل چندگانه آگاهی، نگرش، مهارت و سرمایه اجتماعی تأثیر می‌پذیرد (Tahmasebi Moghaddam, Ahadnejad-Ravesht, Heydari & Shoghli, 2021) مدل BYM2 با مدل‌سازی کامل درستنمایی پواسون، نیاز به تثبیت واریانس نمونه‌ای را برطرف کرده و این حساسیت را کاملاً دور می‌زند.

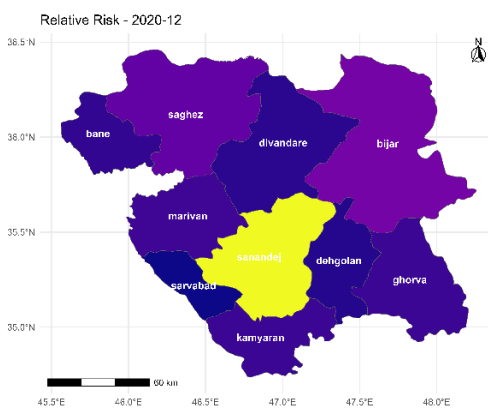
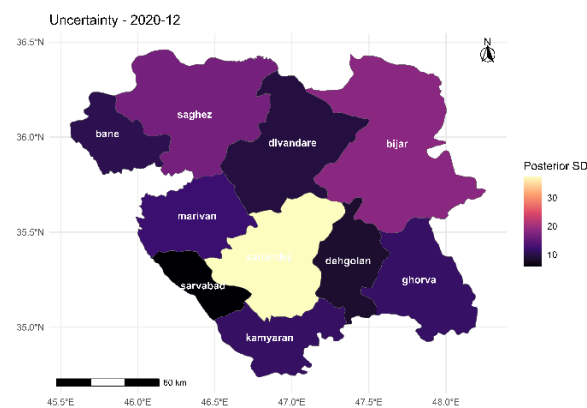
ارزیابی عدم قطعیت فضایی

نقشه‌های خطر نسبی پسین و انحراف معیار پسین برای هر فصل تولید شد. برای نمایش گویای الگوهای فضایی در طول دوره همه‌گیری، نقشه‌های شش ماه شاخص - شامل ماه‌های اوج (آبان ۱۳۹۹ و شهریور ۱۴۰۰)، ماه‌های کم‌بروز با بیشترین حساسیت (اردیبهشت ۱۴۰۱ و بهمن ۱۴۰۱) و ماه‌های آغازین و گذار (اسفند ۱۳۹۸ و تیر ۱۴۰۱) در شکل ۷ گردآوری شده است.

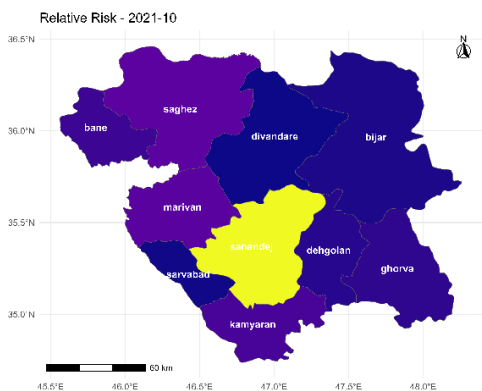
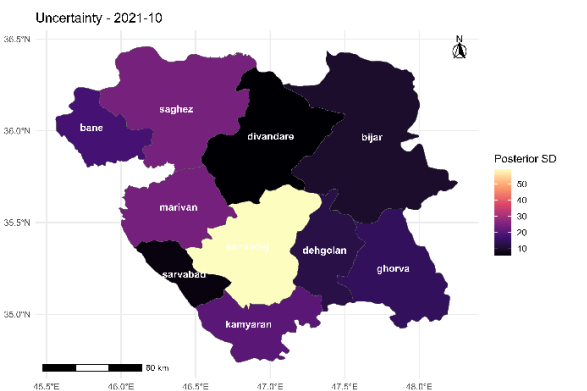
BYM2 - 2020-03

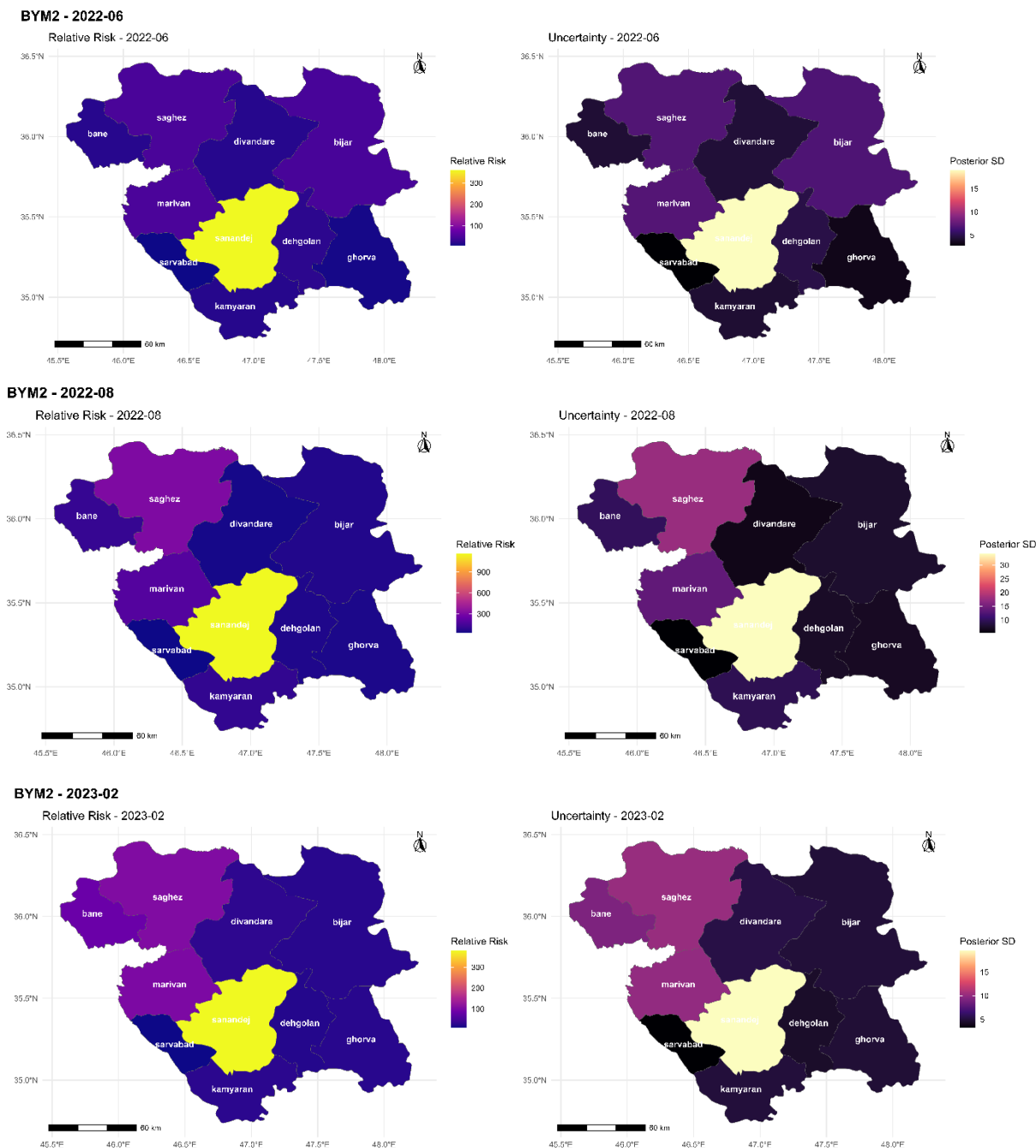


BYM2 - 2020-12



BYM2 - 2021-10



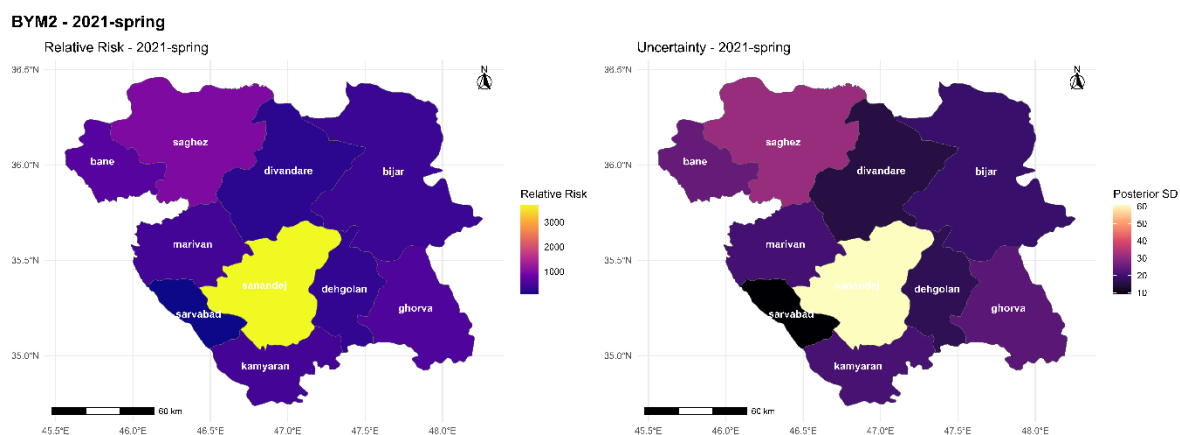


شکل ۷- نقشه‌های خطر نسبی پسین و انحراف معیار پسین مدل BYM2 برای شش ماه شاخص

Fig. 7. Posterior relative risk maps and posterior standard deviation maps from the BYM2 model for six selected months

شش ماه منتخب شامل اسفند ۱۳۹۸ (آغاز دوره)، آبان ۱۳۹۹ (اوج موج دوم)، شهریور ۱۴۰۰ (اوج موج دلتا)، اردیبهشت ۱۴۰۱ (حساسیت بالای واریانس نمونه‌ای)، تیر ۱۴۰۱ (کمینه بروز) و بهمن ۱۴۰۱ (پایان دوره) می‌باشد. نقشه‌های ردیف بالا خطر نسبی (میانگین پسین) و ردیف پایین انحراف معیار پسین را نشان می‌دهند. این نقشه‌ها با استفاده از مدل BYM2 با ماتریس وزن معکوس فاصله برازش و در INLA پیاده‌سازی شده‌اند.

در ماه‌های با بروز بالا، خطر نسبی پسین در سنج و مریوان به بیش از ۰/۲ رسید، درحالی‌که انحراف معیار پسین در این شهرستان‌ها زیر ۰/۳ باقی ماند. در مقابل، در ماه‌های کم‌بروز، انحراف معیار پسین در شهرستان‌های کم‌جمعیت مانند سروآباد افزایش یافت. این الگوها در تمامی ماه‌ها پایدار بودند. در مقیاس فصلی نیز الگوهای مشابهی مشاهده شد؛ به‌عنوان نمونه، نقشه خطر نسبی و انحراف معیار پسین برای فصل بهار ۱۴۰۰ در شکل ۸ ارائه شده است.



شکل ۸- نقشه‌های خطر نسبی پسین و انحراف معیار پسین مدل BYM2 برای فصل بهار ۱۴۰۰ به‌عنوان یک فصل نمونه

Fig. 8. Posterior relative risk maps and posterior standard deviation maps from the BYM2 model for spring 2021 as a representative season

این فصل هم‌زمان با موج چهارم همه‌گیری (گسترش واریانت آلفا، B.1.1.7) در ایران، بیشترین کاهش RMSE را در میان تمام ۱۳ فصل به‌خود اختصاص داد: RMSE مدل فای-هریوت برابر ۳/۸۰ و RMSE مدل BYM2 با ماتریس وزن معکوس فاصله برابر ۱/۸۰ (کاهش ۵۳ درصدی) است. سنج با ۳۷۰۴ مورد، پربروزترین و سروآباد با ۷۸ مورد، کم‌بروزترین شهرستان در این فصل بودند. برآوردها بر اساس مجموع موارد سه‌ماهه و استفاده از تقریب INLA به‌دست آمده‌اند.

در فصل بهار ۱۴۰۰ - مقارن با موج چهارم همه‌گیری و گسترش واریانت آلفا (B.1.1.7) - مدل BYM2 با وزن معکوس فاصله، RMSE را از ۳/۸۰ (فای-هریوت) به ۱/۸۰ کاهش داد (کاهش ۵۳ درصدی) که بیشترین درصد بهبود در میان تمام ۱۳ فصل بود.

محدودیت‌ها و نقاط قوت پژوهش

این مطالعه از چندین نقطه قوت برخوردار است: مقایسه هم‌زمان چهار چارچوب مدل‌سازی در یک سناریوی واقعی با $N=10$ که در ادبیات موجود انجام نشده بود؛ آزمون شش ماتریس وزن فضایی گوناگون؛ تحلیل حساسیت نظام‌مند واریانس نمونه‌ای؛ و استفاده از PCA برای کاهش ابعاد ۲۷ متغیر کمکی. با این حال، محدودیت‌هایی نیز وجود دارد: مهم‌ترین آن‌ها تعداد اندک واحدهای فضایی است که برآورد پارامترهای فضایی را ناپایدار کرده و امکان اجرای موفق بوت‌استرپ پارامتری برای برآورد MSE مدل‌های فای-هریوت را سلب نمود. یک پرسش کلیدی که از یافته‌های این پژوهش برمی‌خیزد آن است که برای اینکه یک مدل فضایی بتواند بهبود قابل‌ملاحظه‌ای نسبت به مدل غیرفضایی داشته باشد، حداقل به چند واحد فضایی نیاز است؟ اگرچه پاسخ قطعی مستلزم شبیه‌سازی‌های نظام‌مند است، ادبیات موضوع سرنخ‌های مهمی به دست می‌دهد. پورتر و همکاران (Porter et al., 2015) در مطالعه‌ای شبیه‌سازی نشان دادند که با کمتر از ۲۰ ناحیه، برآورد پارامتر خودهمبستگی فضایی ناپایدار می‌شود و مدل‌های فضایی اغلب بهبود قابل‌توجهی ارائه نمی‌دهند. برخی مطالعات دیگر مرز ۱۵ تا ۳۰ ناحیه را برای عملکرد مطمئن مدل‌های فضایی کلاسیک مانند فای-هریوت فضایی پیشنهاد کرده‌اند (Rao & Molina, 2015). نتایج پژوهش ما با این هشدارها هم‌خوانی دارد: با ۱۰ شهرستان، مدل فضایی فای-هریوت عملاً مزیتی بر نسخه غیرفضایی نداشت. با این حال، نکته ظریف آن است که مدل بیزی BYM2 حتی با

همین تعداد اندک توانست عملکرد بهتری ارائه دهد، زیرا رویکرد بیزی با توزیع‌های پیشین انقباضی و ساختار سلسله‌مراتبی قوی‌تر، تا حدی کمبود اطلاعات نمونه‌ای را جبران می‌کند. از این رو، آستانه «حداقل تعداد ناحیه» بسته به نوع مدل و چارچوب استنباطی (فراوانی‌گرا در مقابل بیزی) متفاوت است و تحقیقات آتی با طراحی شبیه‌سازی‌های هدفمند باید این آستانه‌ها را کمی‌سازی کنند. همچنین، استفاده از تقریب پواسون برای واریانس نمونه‌ای ($v_i = \text{cases}_i$) ممکن است واریانس واقعی را دقیقاً منعکس نکند. به کارگیری مولفه‌های اصلی نیز تفسیرپذیری ضرایب را کاهش می‌دهد. تحلیل‌ها به صورت مقطعی انجام شد و خودهمبستگی زمانی لحاظ نشده است. برای پژوهش‌های آتی، توسعه مدل‌های فضایی-زمانی (مانند مدل کنور-هالده با اثرات متقابل نوع چهارم)، به کارگیری مدل‌های صفرآماسیده برای مناطق کم‌بروز، و اجرای یک مطالعه شبیه‌سازی نظام‌مند با تغییر تعداد نواحی و شدت همبستگی فضایی پیشنهاد می‌شود.

نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف مقایسه عملکرد چهار چارچوب مدل‌سازی کوچک ناحیه — برآورد مستقیم، فای-هریوت غیرفضایی، فای-هریوت فضایی و مدل بیزی BYM2 با تقریب INLA در برآورد موارد ماهانه کووید-۱۹ در ۱۰ شهرستان استان کردستان طی یک دوره ۳۶ ماهه به انجام رسید. تحلیل‌ها بر پایه معیارهای کمی RMSE، WAIC، ضریب تغییرات، تحلیل حساسیت واریانس نمونه‌ای، و نقشه‌های عدم قطعیت فضایی صورت گرفت. مهم‌ترین یافته‌های پژوهش عبارت‌اند از: (۱) مدل BYM2 با ماتریس وزن فضایی معکوس فاصله، میانه RMSE فصلی را به‌طور میانگین ۳۸ درصد نسبت به مدل فای-هریوت کاهش داد و در تمام فصول و اکثر ماه‌ها کمترین خطا و بهترین برازش را نشان داد؛ (۲) مدل فای-هریوت فضایی در قیاس با نسخه غیرفضایی، بهبودی حاشیه‌ای (کمتر از ۶ درصد کاهش RMSE) داشت که بیان‌گر محدودیت برآوردپذیری پارامتر خودهمبستگی فضایی با تنها ۱۰ واحد فضایی است؛ و (۳) تحلیل حساسیت آشکار ساخت که برآوردهای EBLUP مدل فای-هریوت در سطح استان به‌طور میانگین پایدار هستند، اما در شهرستان‌های کم‌جمعیت همانند سروآباد، دو برابر شدن واریانس پواسونی تا ۱۰ درصد تغییر در برآورد موارد را موجب می‌شود. دستاوردهای اصلی این پژوهش عبارت‌اند از: ۱. برای نخستین بار، مقایسه‌ای هم‌زمان و نظام‌مند بین مدل‌های کلاسیک و بیزی فضایی در شرایطی با تعداد بسیار اندک نواحی ($N=10$) با داده‌های واقعی همه‌گیری انجام شد که پیش‌تر در ادبیات موجود نبود. ۲. با آزمون شش ماتریس وزن فضایی گوناگون، ماتریس وزن فضایی معکوس فاصله به‌عنوان ساختار بهینه همسایگی برای مدل BYM2 شناسایی گردید که ضمن حفظ برازش مطلوب، بیشترین دقت پیش‌بینی را ارائه داد. ۳. تحلیل حساسیت واریانس نمونه‌ای به صورت نظام‌مند و با دو سناریوی نصف و دوبرابر شدن اجرا شد و نشان داد که پایداری برآوردهای فای-هریوت در گرو تعیین صحیح واریانس نمونه‌ای، به‌ویژه در نواحی کم‌بروز، است. ۴. نقشه‌های عدم قطعیت پسین برای تمام فصول تولید گردید و به‌عنوان یک لایه اطلاعاتی ضروری در کنار نقشه‌های خطر نسبی، امکان ارزیابی موضعی قابلیت اعتماد برآوردها را برای تصمیم‌گیران فراهم ساخت. بر مبنای این یافته‌ها، به سیاست‌گذاران و مدیران سلامت عمومی توصیه می‌شود که در پایش همه‌گیری‌ها در سطوح شهرستانی، مدل‌های بیزی فضایی همچون BYM2 را جایگزین برآوردهای مستقیم یا مدل‌های کلاسیک کنند؛ چراکه این مدل‌ها با قرض‌گیری از اطلاعات نواحی همسایه و کمی‌سازی مستقیم عدم قطعیت، مبنای استوارتری برای تخصیص منابع محدود (مانند کیت‌های تشخیصی، تخت‌های بیمارستانی و نیروی انسانی) فراهم می‌آورند. در صورت نبود زیرساخت محاسباتی، مدل فای-هریوت به‌عنوان گزینه‌ای نسبتاً ساده قابل استفاده است، اما برآوردهای آن در شهرستان‌های کم‌جمعیت باید با احتیاط تفسیر شده و بازه خطای ۱۰ درصدی محتمل ناشی از حساسیت واریانس، در تخصیص منابع (همچون تخت بیمارستانی و کیت) رسماً لحاظ گردد. پیاده‌سازی عملی این چارچوب‌ها با استفاده از نرم‌افزار R و بسته‌های INLA و sae امکان‌پذیر بوده و نیازمند سرمایه‌گذاری اندک برای آموزش نیروی انسانی متخصص است. افق‌های آینده این حوزه پژوهشی شامل چند مسیر مشخص است: نخست، توسعه مدل‌های فضایی-زمانی که همبستگی را هم‌زمان در دو بعد مکان و زمان مدل‌سازی می‌کنند تا پویایی فصلی و انتشار اپیدمی را بهتر ردیابی کنند؛ دوم،

به‌کارگیری مدل‌های صفرآماسیده برای مدیریت ماه‌ها و مناطقی که شمار موارد در آن‌ها بسیار پایین است؛ سوم، آزمون استواری نتایج نسبت به انتخاب توزیع‌های پیشین مختلف (مانند PC-priors) به‌منظور تقویت اعتبار استنباط‌های بیزی؛ و چهارم، اجرای یک مطالعه شبیه‌سازی نظام‌مند با تغییر تعداد نواحی، شدت همبستگی فضایی و اندازه نمونه درون ناحیه‌ای که امکان تعمیم‌پذیری یافته‌ها را افزایش می‌دهد. محدودیت اصلی این مطالعه — یعنی تعداد اندک واحدهای فضایی — خود به یک فرصت روش‌شناختی برای تحقیقات آتی بدل می‌شود: سنجش کمینه تعداد نواحی لازم برای برتری معنادار مدل‌های فضایی، راهنمایی عملی برای پژوهشگران حوزه سلامت عمومی فراهم خواهد آورد. در مجموع، این پژوهش نشان داد که مدل‌های بیزی فضایی، به‌ویژه BYM2، چارچوبی دقیق، قابل اعتماد و آماده برای به‌کارگیری در سامانه‌های جاری پایش بیماری‌ها در سطوح فرااستانی هستند و می‌توانند به ارتقای کیفیت تصمیم‌گیری‌های بهداشت عمومی کمک شایانی کنند.

References

- Bell, W. R., Basel, W. W., & Cruse, C. L. (2019). Use of the Fay–Herriot model to produce official statistics for small areas. *Survey Methodology*, 45(2), 275–303. <https://doi.org/10.18130/sm-2019-0009>
- Besag, J., York, J., & Mollié, A. (1991). Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 43(1), 1–20. <https://doi.org/10.1007/BF00116466>
- Bivand, R. S., Pebesma, E., & Gómez-Rubio, V. (2013). *Applied spatial data analysis with R* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7618-4>
- Boubeta, M., Lombardía, M. J., & Morales, D. (2016). Empirical best prediction under area-level Poisson mixed models. *TEST*, 25(3), 548–569. <https://doi.org/10.1007/s11749-015-0469-8>
- Briz-Redón, Á., Iftimi, A., Correcher, J. F., De Andrés, J., Lozano, M., & Romero-García, C. (2022). A comparison of multiple neighborhood matrix specifications for spatio-temporal model fitting: A case study on COVID-19 data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 36(1), 271–282. <https://doi.org/10.1007/s00477-021-02077-y>
- Burgard, J. P., Krause, J., Kreutzmann, A. K., & Münnich, R. (2022). A Monte Carlo simulation study for comparing small area estimation models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 92(15), 3101–3125. <https://doi.org/10.1080/00949655.2022.2049813>
- Fay, R. E., & Herriot, R. A. (1979). Estimates of income for small places: An application of James–Stein procedures to census data. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 269–277. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10482505>
- Guha, S., & Chandra, H. (2024). Multivariate spatial Fay–Herriot models for small area estimation. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A*, 187(1), 60–82. <https://doi.org/10.1093/jrssa/qnad079>
- Jolliffe, I. T., & Cadima, J. (2016). Principal component analysis: A review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 374(2065), 20150202. <https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0202>
- Maino Vieytes, C. A., Mondal, S., Mukherjee, D., & Banerjee, S. (2023). Bayesian small area estimation for health outcomes. *American Journal of Public Health*, 113(1), 40–48. <https://doi.org/10.2105/AJPH.2022.307110>
- Marcis, L. (2023). *Introducing a “shift” predictor in the multivariate small area estimation* [Doctoral dissertation, Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale]. IRIS. <https://iris.unicas.it/handle/11580/102023>
- Marcis, L., Pagliarella, M. C., & Salvatore, R. (2023). How the sampling variances affect the linear predictor of the Fay–Herriot model. *METRON*, 82(1), 109–130. <https://doi.org/10.1007/s40300-023-00258-1>
- Molina, I., & Marhuenda, Y. (2015). sae: An R package for small area estimation. *The R Journal*, 7(1), 81–98. <https://doi.org/10.32614/RJ-2015-008>
- Molina, I., Salvati, N., & Pratesi, M. (2009). Bootstrap for estimating the MSE of the spatial EBLUP. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(7), 2598–2612. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2008.12.019>

- Moraga, P. (2018). Small area disease risk estimation and visualization using R. *The R Journal*, 10(1), 487–506. <https://doi.org/10.32614/RJ-2018-036>
- Nabiuni, S., Hasanabadi, D., & Farajirad, A. (2022). Study of the impact of climate change on the security of rural areas (Case study: Kurdistan province). *Village and Space Sustainable Development*, 3(3), 137–161. <https://doi.org/10.22077/vssd.2022.5539.1125>
- Nasire Zare, S., Parizadi, T. & .Hakimi, M. (۲۰۲۲). Pathology of rural areas in risks of COVID-۱۹ outbreak (Case study: Rural areas of Ijroud City in Zanjan Province). *Journal of Geography and Environmental Hazards*, 11(1), 217–234. [in Persian] <https://doi.org/10.22067/geoh.2021.72004.1098>
- Nguyen, M. H., Neyens, T., Lawson, A. B., & Faes, C. (2025). Assessing the impact of neighborhood structures in Bayesian disease mapping. *Journal of Applied Statistics*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/02664763.2025.2533479>
- Pfeffermann, D., Glickman, H., & Preminger, A. (2024). Mean square error estimation of small area predictors by use of parametric and nonparametric bootstrap. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 76(1–2), 96–117. <https://doi.org/10.1177/00080683231203823>
- Porter, A. T., Holan, S. H., Wikle, C. K., & Cressie, N. (2015). Spatial Fay–Herriot models for small area estimation with functional covariates. *Journal of Survey Statistics and Methodology*, 3(2), 137–161. <https://doi.org/10.1093/jssam/smv002>
- Rao, J. N. K., & Molina, I. (2015). *Small area estimation* (2nd ed.). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118735855>
- Rathnayake, N., Dai, H. D., Charnigo, R., Schmid, K., & Meza, J. (2023). A general class of small area estimation using calibrated hierarchical likelihood approach with applications to COVID-19 data. *Journal of Applied Statistics*, 50(16), 3384–3404. <https://doi.org/10.1080/02664763.2022.2112556>
- Riebler, A., Sørbye, S. H., Simpson, D., & Rue, H. (2016). An intuitive Bayesian spatial model for disease mapping that accounts for scaling. *Statistical Methods in Medical Research*, 25(4), 1145–1165. <https://doi.org/10.1177/0962280216660422>
- Rue, H., Martino, S., & Chopin, N. (2009). Approximate Bayesian inference for latent Gaussian models by using integrated nested Laplace approximations. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 71(2), 319–392. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2008.00700.x>
- Satorra Burguet, P., Saez, M., & Barceló, M. A. (2024). Bayesian spatio-temporal analysis of the COVID-19 pandemic in Catalonia. *Scientific Reports*, 14, 4220. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-53527-w>
- Sikov, A., & Cerda-Hernandez, J. (2024). Prediction in non-sampled areas under spatial small area models. *Statistical Methods & Applications*, 33(4), 1079–1116. <https://doi.org/10.1007/s10260-024-00759-9>
- Tahmasebi Moghaddam, H., Ahadnejad-Ravesht, M., Heydari, M. T & .Shoghli, A. (۲۰۲۱). Explaining the factors affecting social resilience against biological hazards with emphasis on COVID-19 (Case study: Zanjan City). *Journal of Geography and Environmental Hazards*, 10(1), 1–19. [in Persian] <https://doi.org/10.22067/geoh.2021.67234.0>
- Wakefield, J. C. (2007). The Concept of Mental Disorder: Diagnostic Implications of the Harmful Dysfunction Analysis. *World Psychiatry*, 6, 149–156.
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11, 3571–3594. <https://www.jmlr.org/papers/v11/watanabe10a.html>
- World Health Organization. (2024). *WHO COVID-19 dashboard*. Retrieved April 15, 2024, from <https://data.who.int/dashboards/covid19/cases>